bettermarks
MATHS MADE EASY

Kansexperimenten herkennen

Een **kansexperiment** is een experiment dat meer dan één mogelijke uitkomst heeft. Het is niet mogelijk om een zekere voorspelling te doen over de uitkomst van een kansexperiment.

We noemen de opsomming van één of meerdere mogelijke uitkomsten van een kansexperiment een **gebeurtenis** .

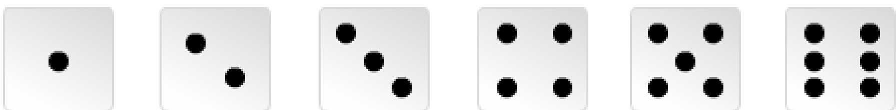
Een muntje opgooien

----- Voorbeeld -----

Het opgooien van een muntje is een kansexperiment, omdat óf kop óf munt boven komt te liggen. Het is niet mogelijk om te voorspellen of kop of munt boven zal liggen als je het muntje opgooit.

Gooien met een dobbelsteen

----- Voorbeeld -----



Een normale dobbelsteen heeft de getallen 1, 2, 3, 4, 5 en 6 op de zijden.
Gooien met deze dobbelsteen is een kansexperiment. Elk van de gegeven cijfers kan een uitkomst zijn van elke worp.
Het is niet mogelijk om te voorspellen welke van de zes getallen werkelijk gegooid zal worden.

Kansexperimenten herkennen

----- Voorbeeld -----

Welk van de volgende **gebeurtenissen** zijn **kansexperimenten**?

- A: De 13e kaart trekken van een geschud pak kaarten
- B: Een even of een oneven getal gooien bij een standaard dobbelsteen
- C: Het tossen met een munt nadat kop 10 keer achter elkaar boven lag
- D: Het vinden van de som van de hoeken van een willeukeurig gekozen driehoek

Oplossing:

Gebeurtenissen A en C zijn kansexperimenten.

Uitleg:

Je kunt niet precies voorspellen welke van de 52 kaarten de 13e kaart van bovenaf zal zijn, nadat de kaarten zijn geschud.
Daarom is A een kansexperiment.

Elke kant van een dobbelsteen heeft een even aantal (2, 4 of 6) of een oneven aantal (1, 3 of 5) ogen.
Het gooien van een even of een oneven getal is geen kansexperiment, omdat een van beide zeker zal gebeuren.

Zelfs als een munt 10 keer achter elkaar "kop" als uitkomst geeft, kunnen de volgende keer "kop" en "munt" beide gegooid worden.
Daarom is C een kansexperiment.

De som van de hoeken is gelijk aan 180° in **elke** driehoek.
Het vinden van de som van de hoeken is dus geen kansexperiment.

- - - - -

Samengestelde kansexperimenten en boomdiagrammen

Een kansexperiment is een experiment met meerdere mogelijke uitkomsten die niet voorspelbaar zijn.
Bij een **herhaald kansexperiment** voeren we hetzelfde kansexperiment meerdere keren na elkaar uit.
Een **samengesteld kansexperiment** bestaat uit twee of meer (dezelfde of verschillende) kansexperimenten.

Alle mogelijke uitkomsten van een samengesteld kansexperiment kunnen we vinden als we een **boomdiagram** tekenen:

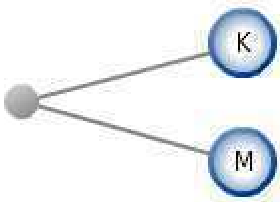
1. Neem een stip als beginpunt voor experiment 1.
   Teken hierachter voor elke mogelijke uitkomst van experiment 1 een "tak" met aan het eindpunt een "bol".
   Noteer de mogelijke uitkomst in de bol (je mag dit afkorten met een letter).
2. Neem elke bol van experiment 1 als beginpunt voor experiment 2.
   Teken hierachter voor elke mogelijke uitkomst van experiment 2 een "tak" en een "bol" en noteer de uitkomst in de bol.
4. Ga zo verder voor eventuele volgende experimenten.
5. Elke route naar het eindpunt van de laatste tak is een mogelijke uitkomst van het samengestelde experiment.

---- Voorbeeld --

Wat zijn alle mogelijke uitkomsten als we twee keer een munt opgooien?

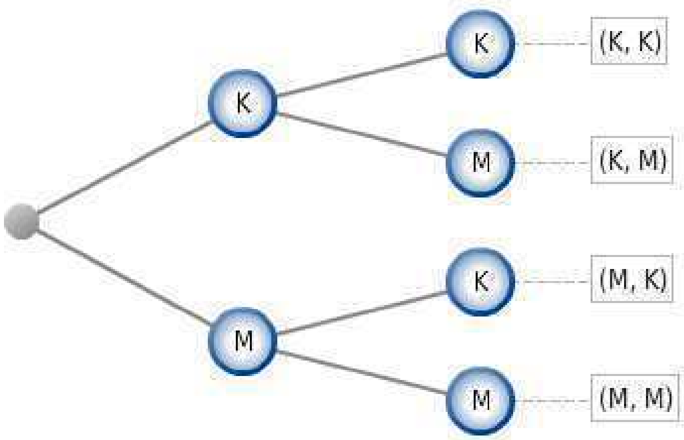
Stap 1: Teken alle mogelijke uitkomsten van het eerste experiment..

Er zijn twee mogelijke uitkomsten voor het eerste experiment: kop (K) en munt (M).
Het boomdiagram ziet er zo uit:



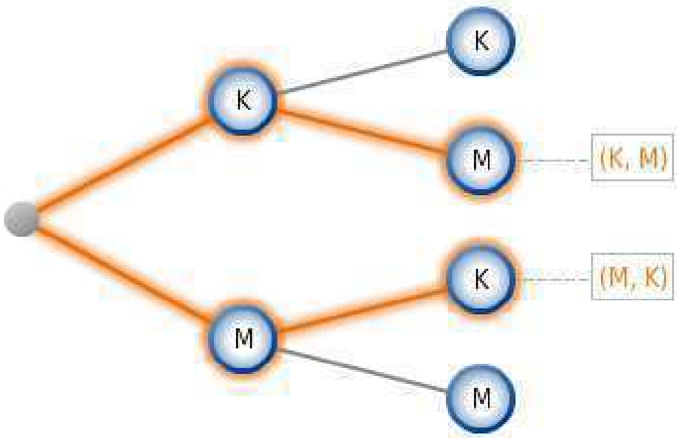
Stap 2: Teken alle mogelijke uitkomst van het tweede experiment.

We hebben weer dezelfde twee mogelijke uitkomsten: kop (K) en munt (M).
Teken deze takken achter elke uitkomst van het eerste experiment.



Omdat dit het laatste experiment is kunnen de alle mogelijke uitkomsten achter de eindpunten zetten: KK, KM, MK en MM.

Als je alleen geïnteresseerd bent in de gebeurtenis **"precies één keer kop"** kun je in het boomdiagram vinden hoe vaak deze voorkomt:



- - - - -

Regels voor het tellen van mogelijkheden

Het tellen van het aantal mogelijkheden is belangrijk bij het berekenen van kansen. Bijvoorbeeld bij het berekenen van de kans op het winnen van de loterij.

Voor het tellen van kansen kunnen we regels opstellen:

- **Productregel:**
  Als er **p** mogelijkheden zijn voor het een, en **q** mogelijkheden voor het ander, dan zijn er in totaal $\mathbf{p \cdot q}$ mogelijkheiden voor beide samen.
- In een **hele** competitie met **n** **ploegen** zijn er $\mathbf{n \cdot (n-1)}$ wedstrijden.
- In een **halve** competitie met **n** **ploegen** zijn er $\mathbf{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)}$ wedstrijden.

---- Voorbeeld 1 --

Tom bestelt een paar schoenen op de website van een groot sportmerk.
Hij kan hier de kleuren van de schoen zelf samenstellen.

Voor het type dat Tom koopt zijn er twee verschillende basiskleuren: groen of blauw
Hij mag één basiskleur kiezen.
Hij mag ook één kleur kiezen voor de veters van zijn schoenen.
Hiervoor kan hij uit drie verschillende kleuren kiezen: groen, blauw of oranje

Hoeveel verschillende schoenen kan Tom samenstellen?

Oplossing:

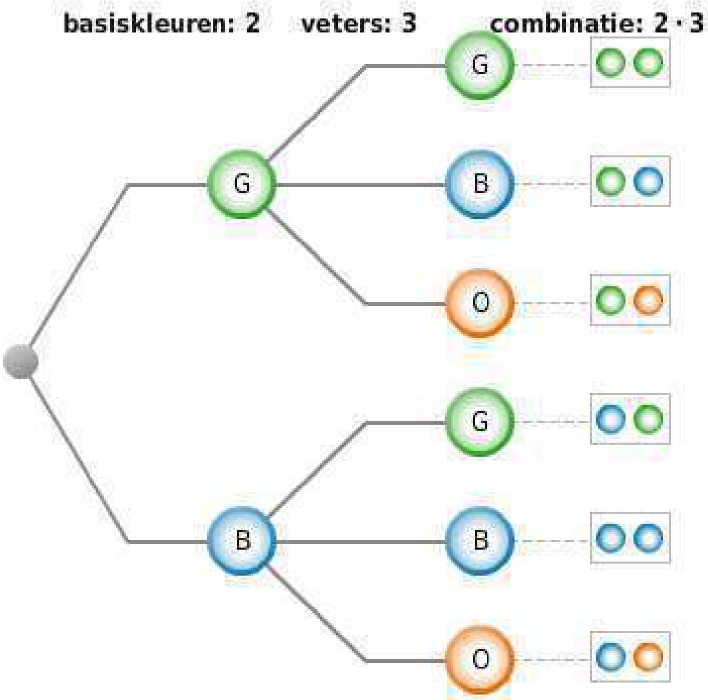
Tom kan 6 verschillende schoenen samenstellen.

Uitleg:

Tom kan **2** basiskleuren combineren met **3** kleuren van de veters.

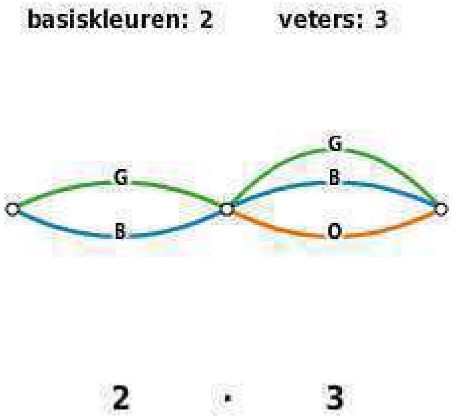
Dit kan op verschillende manieren worden laten zien. De twee meest gebruikelijke zijn:

Boomdiagram:
Teken het aantal mogelijkheden voor keuze 1.
Verbindt vanaf elk van deze mogelijkheden een tak voor de mogelijkheden voor keuze 2.



Elk eindpunt geeft een mogeljkheid aan voor het samengestelde experiment.

Wegendiagram:
Teken elke mogelijkheid voor keuze 1 als een weg tussen 2 punten.
Teken voor keuze 2 weer nieuwe wegen naar een volgend punt.



Elke aparte route geeft een mogelijkheid aan voor het samengestelde experiment.

Een wegendiagram is handig als er veel mogelijkheden en experimenten zijn.

Zoals je in de diagrammen kunt zien kan Nick **2 · 3** = **6** verschillende schoenen samenstellen.

---- Voorbeeld 2 ----

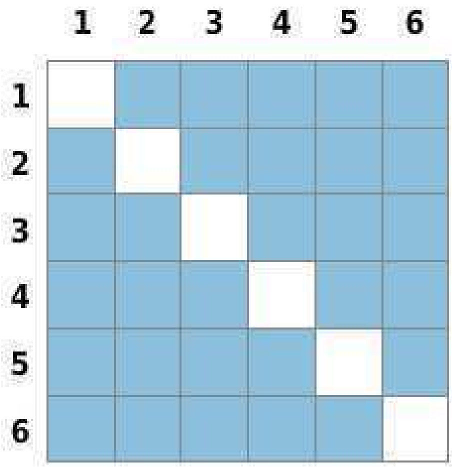
Er zijn twee manieren om een competitie met meerdere ploegen op te zetten:

Hele competitie:
Alle ploegen spelen **twee keer** tegen elkaar.

Als er **6** ploegen in de competitie spelen, is het **aantal wedstrijden**

$\mathbf{6 \cdot 5} = \mathbf{30}$.

Waarom klopt dit?
Geef alle ploegen een nummer van **1** tot **6**.
Je kunt nu **elke wedstrijd** voorstellen als een **gekleurd vakje** in de tabel hieronder.



Het aantal wedstrijden is nu gelijk aan het aantal gekleurde vakjes.
De tabel heeft in totaal $6 \cdot 6$ vakjes. De 6 vakjes op de diagonale lijn zijn niet gekleurd.

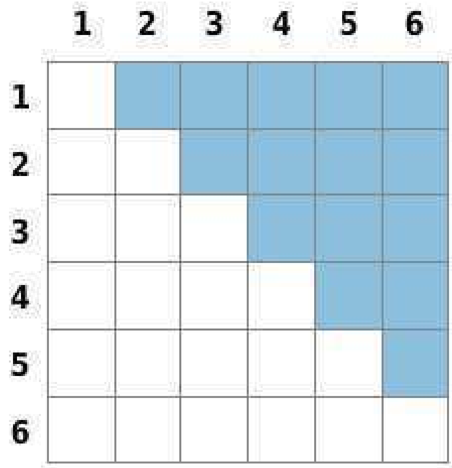
$$\begin{aligned} \textbf{aantal wedstrijden: } &= 6 \cdot 6 - 6 \\ &= 6 \cdot (6 - 1) \\ &= \mathbf{6 \cdot 5} \\ &= \mathbf{30} \end{aligned}$$

Halve competitie:
Alle ploegen spelen **slechts één keer** tegen elkaar.

Als er **6** ploegen in de competitie spelen is het **aantal wedstrijden**

$\mathbf{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5} = \mathbf{15}$.

Waarom klopt dit?
Geef alle ploegen een nummer van **1** tot **6**.
Je kunt nu **elke wedstrijd** voorstellen als een **gekleurd vakje** in de tabel hieronder.



Het aantal wedstrijden is nu gelijk aan het aantal gekleurde vakjes.
Dit is de **helft** van het aantal wedstrijden in een hele competitie:

$$\begin{aligned} \textbf{aantal wedstrijden: } &= \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 6 - 6) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 - 1) \\ &= \mathbf{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5} \\ &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

Het berekenen van het aantal mogelijkheden gaat over op hoeveel manieren we iets kunnen doen of ordenen.

Bij een wachtwoord van twee cijfers zijn er 81 mogelijkheden, want zowel het eerste cijfer als het tweede cijfer kan 1 t/m 9 zijn.

Het totaal aantal mogelijkheden is dan $9 \cdot 9 = 81$

----- Voorbeeld 1 -----

Hoeveel mogelijkheden zijn er voor zes personen om in een treinwagon te gaan zitten met zes zitplaatsen?

Oplossing:

Er zijn 720 mogelijkheden.

Uitleg:

Er zijn zes zitplaatsen en zes personen. Dit betekent dat elke zitplaats wordt bezet.

De eerste persoon die de treinwagon binnen stapt heeft de keuze uit zes zitplaatsen.

De tweede persoon heeft nog maar de keuze uit vijf zitplaatsen, want één zitplaats is al bezet.

Dit doen we ook voor de derde, vierde, vijfde en zesde persoon

Het totaal aantal mogelijkheden is:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

----- Voorbeeld 2 -----

Hoeveel mogelijkheden zijn er voor drie personen om in een treinwagon te gaan zitten met zes zitplaatsen?

Oplossing:

Er zijn 120 mogelijkheden.
Uitleg:

Er zijn zes zitplaatsen en drie personen. Dit betekent dat niet elke zitplaats wordt bezet.

De eerste persoon die de treinwagon binnen stapt heeft de keuze uit zes zitplaatsen.

De tweede persoon heeft nog maar de keuze uit vijf zitplaatsen, want één zitplaats is al bezet.

De derde persoon heeft nog maar de keuze uit vier zitplaatsen, want twee zitplaatsen zijn al bezet.

Het totaal aantal mogelijkheden is:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

- - - - -

Kansen berekenen met behulp van diagrammen

Als je alle mogelijke uitkomsten van een kansexperiment kunt tellen, is er een eenvoudige manier om de kans op een gebeurtenis te berekenen.

Teken een diagram met alle mogelijke uitkomsten. Tel nu het aantal keren dat de gewenste uitkomst van de gebeurtenis voorkomt.

De kans P op een gebeurtenis is dan:

$$P = \frac{\text{aantal gewenste uitkomsten}}{\text{totaal aantal mogelijke uitkomsten}}$$

---- Voorbeeld --

Moniek draait twee keer aan dit wiel.
Wat is de kans dat de **som van haar twee uitkomsten** deelbaar is door 3?

Maak een diagram voor alle mogelijke uitkomsten van dit kansexperiment. Er zijn **9 mogelijke uitkomsten**:

3	4	5	6
2	3	4	5
1	2	3	4
	1	2	3

Markeer alle gewenste uitkomsten van de gebeurtenis "som is deelbaar door 3".
Er zijn **3 gewenste uitkomsten**:

3	4	5	**6**
2	**3**	4	5
1	2	**3**	4
	1	2	3

Vul dit nu in in de formule:

$$
\begin{aligned}
P\left(\text{"som is deelbaar door 3"}\right) &= \frac{\text{aantal gewenste uitkomsten}}{\text{totaal aantal mogelijke uitkomsten}} \\
&= \frac{3}{9} \\
&= \frac{1}{3} \\
&\approx 0{,}333
\end{aligned}
$$

De kans op "som is deelbaar door 3" is dus $\frac{1}{3}$.

Kansen in experimenten met gelijke waarschijnlijkheden

Er zijn kansexperimenten waarbij alle mogelijke uitkomsten even waarschijnlijk zijn. Denk bijvoorbeeld aan het gooien van een dobbelsteen. Hierbij is de kans om 1 te gooien even waarschijnlijk als de kans om 6 te gooien.

De kans op een bepaalde gebeurtenis berekenen we met de onderstaande formule:

$$\text{P(een bepaalde gebeurtenis)} = \frac{\text{aantal gewenste uikomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

----- Voorbeeld -----

Een dobbelsteen gooien heeft als mogelijke uitkomsten 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Omdat een dobbelsteen een symmetrische vorm en gewichtsverdeling heeft zijn deze uitkomsten zijn allemaal even waarschijnlijk.
Voor elke zijde is de kans op het gooien hiervan $\frac{1}{6}$.

----- Voorbeeld -----

Bij roulette wordt een balletje in een roulette wiel gerold. Het wiel is in even grote vakjes verdeeld die genummerd zijn van 0 tot 36.
Wat is de kans om 10, 20 of 30 te rollen?

Oplossing:

$P(10,20,30) = \frac{3}{37}$

Uitleg:

Alle vakjes van het roulette wiel zijn even groot. Elk vakje is dus even waarschijnlijk.
Je kunt daarom de kans berekenen met P(een bepaalde gebeurtenis) = $\frac{\text{aantal gewenste uikomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$.

Er zijn **37** verschillende mogelijke uitkomsten. De gewenste uitkomsten zijn 10, 20 en 30: dit zijn dus **3** uitkomsten.

De kans op 10, 20 of 30 is P(10,20,30)ja = $\frac{3}{37}$.